نظرية الاهتزازات الصغيرة

(Theory of Small Oscillations)

9 - 1 تمهيد: طاقة الوضع والاتزان والاستقرار

درسنا في الفصول السابقة الحركة الاهتزازية لبعض المنظومات كالبندول البسيط أو البندول المركب أو نظام مؤلف من جسيم مرتبط بزنبرك. وقد تميزت هذه المنظومات كلها بأن لها درجة حرية واحدة، أما في هذا الفصل فسندرس الحركة الاهتزازية لمنظومات لها أكثر من درجة حرية واحدة مستخدمين معادلات لاغرانج لكتابة معادلات الحركة وإيجاد الترددات الطبيعية التي يمكن للمنظومة أن تهتز بها.

لندرس أولاً شرط قيام منظومة بحركة اهتزازية بسيطة حول وضع اتزان مستقر، فنفترض أن المنظومة محافظة أي أن طاقة وضعها تعتمد على الإحداثيات العامة فقط:

$$V = V(q_1, q_2, \dots q_n)$$

كما وجدنا في الفصل السادس أن القوى العامة مشتقة من V حسب العلاقات:

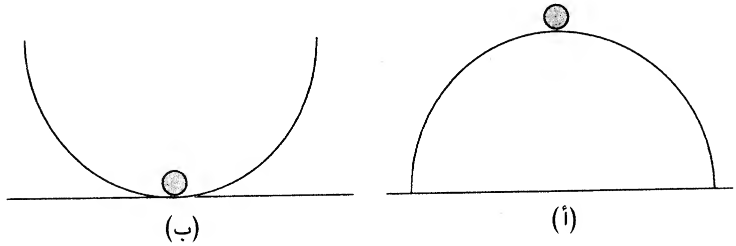
$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{1-9}$$

نعرف وضع الاتزان بأنه النقطة التي تكون كل القوى العامة معدومة عنده، أي أن:

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0 \tag{2-9}$$

تضمن هذه المعادلات أن تبقى المنظومة ساكنة إذا كانت كذلك في البداية، أما إذا دُفعت قليلاً عن وضع الاتزان وعادت إليه فإننا نقول إن اتزانها **مستقر** *(stable)*، وإن لم تعد فإننا نقول إن الاتزان **غير مستقر** *(unstable)*. أما إذا تحركت إلى وضع مختلف عن وضع الاتزان وبقيت ساكنة عنده فنقول إن الاتزان **محايد** *(neutral)*.

كمثل على الاتزان المستقر وغير المستقر، نعتبر كرة موضوعة على ذروة نصف كرة، كما في الشكل (9-1أ)، أو عند قعرها، كما في الشكل (9-1 ب).



الشكل (9-1)

الآن بما أن المنظومة محافظة، نكتب:

$$T+V=T_0+V_0$$

أو

$$T-T_0=-(V-V_0) \tag{3-9}$$

حيث T_0 الطاقة الحركية للمنظومة عند وضع الاتزان (لحظة إعطائها دفعة بسيطة) و V_0 طاقة وضعها آنئذ. فإذا كانت طاقة الوضع أكبر مايمكن عند وضع الاتزان عندئذ يكون $V-V_0$ سالباً أي أن $T-T_0$ سيكون موجباً أي T ستزداد كلما ابتعدت المنظومة عن وضع الاتزان وهذا، يعطي حالة اتزان غير مستقر قطعياً.

من جهة أخرى إذا كانت طاقة الوضع عند الاتزان أصغر ما يمكن عندئذ يكون $V-V_0$ موجباً و $T-T_0$ سالباً، أي أن T ستتناقص كلما ابتعد الجسم عن الاتزان، ونستنتج أن الاتزان مستقر في هذه الحالة.

فشرط الاتزان المستقر هو أن تكون طاقة الوضع أصغر مايمكن عند وضع الاتزان.

إذا كانت للمنظومة درجة حرية واحدة، أي أن:

$$V=V(q) \tag{4-9}$$

عندئذ يكون عند وضع الاتزان :

$$\frac{dV}{dq}=0 \qquad (5-9)$$

نعبر عن شرط الاتزان على النحو :

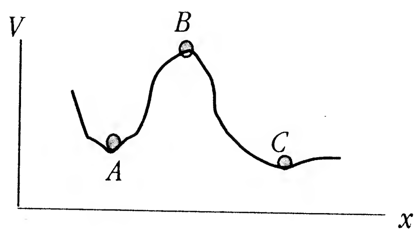
$$\frac{d^2V}{dq^2}>0 \quad \text{(اتزان مستقر)} \qquad (6-9)$$

و

$$\frac{d^2V}{dq^2}<0 \quad \text{(اتزان غير مستقر)} \qquad (7-9)$$

أما إذا كان $d^2V/dq^2=0$ فيجب علينا أن ندرس مشتقات من مراتب أعلى.

توضح النقاط A وB وC، في الشكل (2-9)، أوضاع اتزان مستقر وغير مستقر ومحايد، على الترتيب.



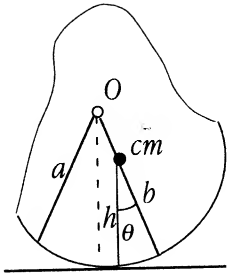
الشكل (2-9)

❑ مثل 1-9

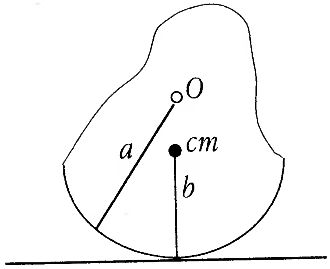
لندرس شرط اتزان جسم m له قعر مدور، كروي أو اسطواني، نصف قطر تقعره a وبعد مركز كتلته عن نقطة تماسه مع مستو أفقي b، كما في الشكل (3-9أ) الذي يمثل وضع الاتزان، ولنفترض أننا دورناه زاوية θ عن هذا الوضع بحيث يصير ارتفاع مركز الكتلة عن المستوي الأفقي h كما في الشكل 3-9 ب).

نكتب طاقة الوضع على النحو

$$V=mgh=mg[a-(a-b)\cos\theta]$$



الشكل (9-1ب)



الشكل (9-1أ)

بالاشتقاق نجد:

$$\frac{dV}{d\theta}=mg(a-b)\sin\theta$$

أي أن:

$$\frac{dV}{d\theta}=0 \quad \text{عندما} \quad \theta=0$$

فـ $\theta=0$ هو وضع اتزان ، كما أن:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=mg(a-b)\cos\theta$$

و

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=mg(a-b) \quad \text{عندما} \quad \theta=0$$

فوضع الاتزان مستقر إذا كان $a>b$، أي عندما يكون مركز الكتلة واقعاً تحت مركز تقعر الجسم . □

9-2 نشر طاقة الوضع كسلسلة قوى

إذا كان لدينا منظومة لها درجة حرية واحدة q ونشرنا طاقة وضعها $V(q)$ حول النقطة $q=a$ نجد:

$$V(q)=\kappa_0+\kappa_1(q-a)+\frac{1}{2!}\kappa_2(q-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}\kappa_n(q-a)^n+\ldots$$

حيث:

$$\kappa_n=\left(\frac{d^n V}{dq^n}\right)_{q=a}$$

إذا كانت $q=a$ وضع اتزان عندئذ يكون $\kappa_1=0$ ويختفي الحد الخطي من السلسلة السابقة، فنحصل على:

$$V(q)=\kappa_0+\frac{1}{2!}\kappa_2(q-a)^2+\ldots \qquad (8-9)$$

يعتمد استقرار الاتزان عند $q=a$ على أول حد غير معدوم بعد κ_0 في النشر السابق. فإذا كان هذا الحد زوجياً في n عندئذ يكون الاتزان مستقراً إذا كان المشتق d^nV/dq^n موجباً، أما إذا كان المشتق سالباً أو n فردية فإن الاتزان غير مستقر. ولمعرفة سبب ذلك نفترض أن n هي مرتبة أول حد غير معدوم، وعندها نجد أنه من أجل أي ابتعاد بسيط عن الاتزان يكون:

$$F=-\frac{\partial V}{\partial q}\approx-\kappa_n(q-a)^{n-1}$$

فحتى يكون الاتزان مستقراً يجب أن يكون اتجاه F نحو a، أي سالباً إذا كان $q>a$ وموجباً إذا كان $q<a$. ولايمكن لهذا أن يتحقق الاّ إذا كانت κ_n موجبة و n زوجية.

في معظم الحالات العملية المهمة يكون $n=2$ أي أن طاقة الوضع هي دالة تربيعية للإزاحة، بينما القوة دالة خطية معها. فإذا نقلنا مبدأ الاحداثيات إلى النقطة $q=a$ واخترنا $V(0)=0$، عندئذ يمكن كتابة:

$$V=\frac{1}{2}\kappa_2 q^2 \qquad (9-9)$$

وذلك بإهمال حدود من مرتبة أعلى في q .

بنفس الشكل، إذا كان لدينا منظومة متعددة درجات الحرية فيمكن أن

نجد تحويلاً خطياً بحيث يكون $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ وضع اتزان إن وجد. يمكن عندئذ نشر طاقة الوضع بالشكل:

$$V(q_1, q_2, \ldots q_n) = \frac{1}{2}(\kappa_{11} q_1^2 + 2\kappa_{12} q_1 \, q_2 + \kappa_{22} q_2^2 + \ldots) \qquad (10-9)$$

حيث:

$$\kappa_{11} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)_{q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0}$$

و

$$\kappa_{12} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0}$$

وهكذا دواليك، حيث وضعنا $V(0,0, \ldots 0) = 0$، كما أن الحد الخطي في السلسلة يساوي الصفر لأننا ننشر حول وضع الاتزان.

يسمى الحد ضمن القوسين في (10-9) **الشكل التربيعي** *(quadratic form)* وإذا كان موجبا أو يساوي الصفر من أجل كل الإحداثيات q_k عندئذ يكون وضع الاتزان $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$ مستقراً. يتحقق ذلك إذا كان:

$$|\kappa_{11} > 0| \qquad \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{vmatrix} > 0$$

وهكذا.

9-3 اهتزاز منظومة ذات درجة حرية واحدة

يمكن كتابة طاقة الحركة لمنظومة ذات درجة حرية واحدة على النحو :

$$T = \frac{1}{2} \mu \dot{q}^2 \qquad (11-9)$$

حيث يمكن أن تكون الأمثال μ ثابتة أو دالة للإحداثي العامq. في كل الأحوال يمكن نشر μ كسلسلة قوى فيq ، لنكتب:

$$\mu(q) = \mu(0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d\mu}{dq}\right)_{q=0} dq + \cdots \qquad (12-9)$$

فإذا كانت $q=0$ وضع اتزان عندئذ يمكن اعتبار الثوابت μ صغيرة بحيث يمكن افتراض أن:

$$\mu = \mu(0) = \text{ثابت} \qquad (13-9)$$

كتقريب مقبول. ونكتب دالة لاغرانج من العلاقة (9-9) على النحو:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\mu\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\kappa q^2 \qquad (14-9)$$

حيث $\kappa = \kappa_2 = (d^2V/dq^2)_{q=0}$.

نكتب معادلات لاغرانج للحركة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

فنجد:

$$\mu\ddot{q} + \kappa q = 0 \qquad (15-9)$$

من ثم إذا كان $q=0$ موضع اتزان مستقر، أي أن $\kappa>0$، عندئذ تهتز q بشكل بسيط حوله بسرعة زاوية ωمعطاة بالعلاقة:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}} \qquad (16-9)$$

وتتغير q حول موضع الاتزان مع الزمن وفق المعادلة:

$$q = q_0\cos(\omega t + \varepsilon) \qquad (17-9)$$

حيث q_0 السعة العظمى و ε الطور الابتدائي.

يتعين هذان الثابتان من الشروط البتدائية .

❐ مثل 9-2

لنجد تردد الاهتزازات الصغيرة للجسم الذي درسناه في المثل 9-1 بفرض أن التماس مع الأرض تام الخشونة بحيث لاينزلق الجسم بتاتاً. عندئذ تصير سرعة مركز الكتلة هي $b\theta$ تقريباً في حالة الاهتزازات الصغيرة. وتصير الطاقة الحركية معطاة بالعلاقة:

$$T=\frac{1}{2}m(m\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}I_{cm}\dot{\theta}^2$$

حيث I_{cm} عزم عطالة الجسم بالنسبة لمركز الكتلة . وكذلك فإن طاقة الوضع هي :

$$V(\theta)=mg[a-(a-b)\cos\theta]$$

$$=[a-(a-b)(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots]$$

$$=\frac{1}{2}mg(a-b)\theta^2+\text{ثابت}+\text{حدود من مراتب أعلى}$$

ونكتب دالة لاغرانج على النحو:

$$L=\frac{1}{2}(mb^2+I_{cm})\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}mg(a-b)\theta^2 \quad .$$

بإهمال الحدود الثابتة والحدود ذات المراتب الأعلى من الدرجة الثانية.

بمقارنة العلاقة السابقة بـ(9-14) و (9-15) نجد أن:

$$\mu=mb^2+I_{cm}$$

و

$$\kappa=mg(a-b)$$

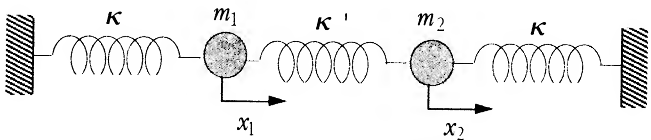
وتكون الحركة حول وضع الاتزان $\theta=0$ مستقرة تقريباً بتردد يساوي:

$$\omega=\sqrt{mg(a-b)/mb^2+I_{cm}}$$ ❐

---

9 - 4 الهزازان البسيطان المرتبطان *(Coupled Harmonic Oscillators)*

سندرس في هذه الفقرة حالة خاصة لمنظومة ذات عدة درجات من الحرية وهي الهزازين البسيطين المرتبطين لما له من أهمية تطبيقية وقابل للتعميم على الحالات الأكثر تعقيداً. فنعتبر جسيمين متماثلين كتلة الواحد m مرتبطين ببعضهما بواسطة ثلاثة زنبركات خفيفة اثنين منها متماثلين k وثالث k'، كما في الشكل (9-4)، وسنفترض أن الحركة تتم أفقياً فقط. ولذا يكون هناك درجتين من الحرية نرمز لهما بـ x_1 و x_2 وتمثلان ابتعاد الجسيمين عن وضع اتزان كل منهما.



الشكل (9-4)

بكتابة الطاقة الحركية للنظام نجد:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \qquad (18-9)$$

وطاقة الوضع:

$$V=\frac{1}{2}\kappa x_1^2+\frac{1}{2}\kappa'(x_2-x_1)+\frac{1}{2}\kappa x_2^2 \qquad (19-9)$$

ومن ثم نجد دالة لاغرانج:

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-[\frac{1}{2}\kappa x_1^2+\frac{1}{2}\kappa'(x_2-x_1)+\frac{1}{2}\kappa x_2^2] \qquad (20-9)$$

ونكتب معادلتي الحركة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=\frac{\partial L}{\partial x_1} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=\frac{\partial L}{\partial x_2} \qquad (21-9)$$

فنجد :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases} \tag{22-9}$$

أو:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k}{m}x_2 + \dfrac{k'}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \tag{23-9}$$

نلاحظ هنا أنه لولم يكن الجسيمان مرتبطان بالزنبرك k' لتحرك كل منهما حركة اهتزازية بسيطة بتردد $\omega = (k/m)^{1/2}$، لذا فمن الطبيعي أن نجرب حلاً لكل من x_1 و x_2 يعتمد على الزمن بطريقة توافقية بسيطة، أي أن:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega t \\ x_2 = A_2 \cos \omega t \end{cases} \tag{24-9}$$

بتعويض هاتين المعادلتين في معادلات الحركة نجد:

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 \cos \omega t + \dfrac{k}{m} A_1 \cos \omega t + \dfrac{k'}{m}(A_1 - A_2)\cos \omega t = 0 \\ -\omega^2 A_2 \cos \omega t + \dfrac{k}{m} A_2 \cos \omega t + \dfrac{k'}{m}(A_1 - A_2)\cos \omega t = 0 \end{cases} \tag{25-9}$$

باختصار العامل المشترك $\cos\omega t$ وجمع الحدود المتشابهة نجد:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right)A_1 - \dfrac{k'}{m}A_2 = 0 \\ -\dfrac{k'}{m}A_1 + \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right)A_2 = 0 \end{cases} \tag{26-9}$$

تمثل العلاقتين السابقتين الشروط الواجب على الأمثال A_1 و A_2 تحقيقها ليكون فرضنا حلاً مقبولاً. فإما أن يكون $A_1=A_2=0$ أو أن يكون معين (محدد) الأمثال مساوياً للصفر، أي:

$$\begin{vmatrix} \frac{k+k'}{m}-\omega^2 & -\frac{k'}{m} \\ -\frac{k'}{m} & \frac{k+k'}{m}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (27-9)$$

تسمى (27-9) **المعادلة المميزة** *(secular equation)*.

بفك المعادلة المميزة نجد:

$$(\frac{k+k'}{m}-\omega^2)^2-(\frac{k'}{m})^2=0 \qquad (28-9)$$

وهي معادلة تربيعية في ω^2 جذراها هما:

$$\omega_a=(\frac{k}{m})^{1/2}$$

$$\omega_b=(\frac{k+2k'}{m})^{1/2}$$

يدعى ω_a و ω_b **الترددين الطبيعيين** *(normal frequencies)* للمنظومة.

يكون الحلان المكنان هما:

$$x_1=A_1\cos\omega_a t \qquad x_2=A_2\cos\omega_a t \qquad (29-9)$$

و

$$x_1=B_1\cos\omega_b t \qquad x_2=B_2\cos\omega_b t \qquad (30-9)$$

يجدر الانتباه إلى أن الجذرين السالبين للمعادلة المميزة لن يعطيا حلين مختلفين لأن $\cos\omega t=\cos(-\omega t)$ إلاّ أن السعات العظمى A_1 و B_1 و A_2 و B_2 ليست مستقلة عن بعضها ذلك أنع إذا عوضنا قيم ω في (26-9) فإننا نجد مايلي:

(أ) إذا كان $\omega=\omega_a$ يكون:

$$(\frac{k+k'}{m}-\frac{k}{m})A_1+\frac{k'}{m}A_2=0$$

وبالاختصار نجد:

$$A_1 = A_2 \tag{31-9}$$

(ب) إذا كان $\omega = \omega_b$ نجد:

$$(\frac{k+k'}{m} - \frac{k+2k'}{m})B_1 - \frac{k'}{m}B_2 = 0$$

أي أن:

$$B_1 = -B_2 \tag{32-9}$$

لذا يمكن التعبير عن الحلين (9-29) و (9-30) على النحو:

$$x_1 = A\cos\omega_a t \qquad x_2 = A\cos\omega_a t \tag{33-9}$$

و

$$x_1 = B\cos\omega_b t \qquad x_2 = -B\cos\omega_b t \tag{34-9}$$

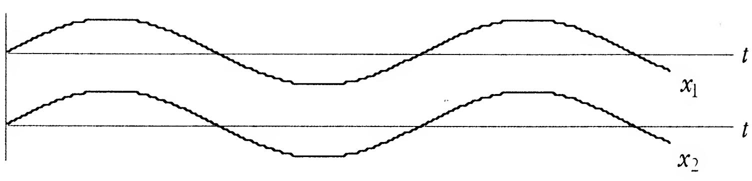
ولايعود هناك ضرورة للرموز السفلى.

تدعى الاهتزازات الناتجة **الحالات الطبيعية** *(normal modes)* ، بينما تدعى ω_a و ω_b **الترددات الطبيعية** *(normal frequencies)*.

تتميز الحالات الطبيعية بأن كل الإحداثيات تهتز بنفس التردد. ففي الحالة المدروسة فإن المنظومة تهتز بالتردد ω_a بحيث أن:

$$x_1 = x_2$$

تدعى هذه الحالة **المتناظرة** *(symmetric mode)* كما هو موضح بالشكل (9-5).

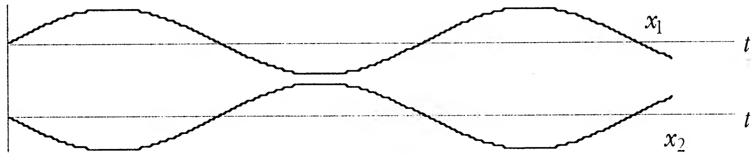


الشكل (9-5)

أما الاهتزاز بالتردد ω_b فيعطي :

$$x_1 = -x_2$$

تدعى هذه الحالة **عكس التناظر** *(antisymmetric mode)*. يمثل الشكل (6-9) هذا الوضع .



الشكل (6-9)

الحل الكامل

لنجد الآن الحل الكامل للمسألة بالعودة إلى معادلات الحركة (24-9) وملاحظة أنها تقبل حلاً يحوي $\sin\omega t$ بدلاً من $\cos\omega t$ مما ينتج عنه نفس النتائج تماماً، أي أن:

$$x_1 = A'\cos\omega_a t \qquad x_2 = A'\cos\omega_a t \tag{35-9}$$

و

$$x_1 = B'\cos\omega_b t \qquad x_2 = -B'\cos\omega_b t \tag{36-9}$$

هي حلول مقبولة. وبما أن المعادلات التفاضلية خطية فيمكن جمع أكثر من حل لها ويكون الناتج حلاً مقبولاً. لذا نكتب الحل العام على النحو:

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t + B\cos\omega_b t + B'\sin\omega_b t \\ x_2 = A\cos\omega_a t + A'\sin\omega_a t - B\cos\omega_b t - B'\sin\omega_b t \end{cases} \tag{37-9}$$

تتحدد السعات العظمى من الشروط الابتدائية، فنجد أنه في اللحظة $t=0$ يكون:

$$x_1(0) = A + B \qquad x_2(0) = A - B$$

كذلك، باشتقاق العلاقات بالنسبة للزمن ووضع $t=0$ نجد:

$$\dot{x}_1(0) = A'\omega_a + B'\omega_b \qquad \dot{x}_2(0) = A'\omega_a - B'\omega_b$$

بحل المعادلات السابقة نجد:

$$(38-9)\qquad \begin{cases} A=\frac{1}{2}[x_1(0)+x_2(0)] & B=\frac{1}{2}[x_1(0)-x_2(0)] \\ A'=\frac{1}{2}[\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0)] & B'=\frac{1}{2}[\dot{x}_1(0)-\dot{x}_2(0)] \end{cases}$$

تسمح لنا المعادلات السابقة بمعرفة بأي من الترددين ستثار المنظومة حسب الشروط الابتدائية. فإذا دُفع الجسمان في البداية بنفس المقدار والاتجاه وتركا، عندئذ تكون الشروط الابتدائية هي: $x_1(0)=x_2(0)$ و $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$. تعني هذه النتيجة أن الوضع المتناظر سيثار فقط لأن كل الثوابت ستكون معدومة ماعدا A.

من جهة أخرى، إذا بدأت الحركة بجذب الجسمين بنفس المقدار باتجاهين متعاكسين عندئذ تصير الشروط الابتدائية $x_1(0)=-x_2(0)$ و $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$. في هذه الحالة تكون كل الثوابت معدومة باستثناء B ويثار الوضع معاكس التناظر فقط.

عندما تكون الشروط الابتدائية مغايرة للحالتين المذكورتين أعلاه فإن المنظومة تهتز بترددات مزيج من الترددين الطبيعيين ω_a و ω_b.

9-5 الإحداثيات الطبيعية *(Normal Coordinates)*

عند دراسة حركة هزازين مرتبطين عرفنا إحداثيين q_a و q_b بالعلاقتين:

$$(39-9)\qquad \begin{cases} q_a=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2) \\ q_b=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1-x_2) \end{cases}$$

من ثم سنكتب دالة لاغرانج بدلالة هذين الإحداثيين، حيث نلاحظ أن:

$$(40-9)\qquad \begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_a+q_b) \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_a-q_b) \end{cases}$$

ومنه

$$T=\frac{m}{2}\frac{(\dot{q}_a+\dot{q}_b)^2}{2}+\frac{m}{2}\frac{(\dot{q}_a-\dot{q}_b)^2}{2}=\frac{m}{2}\dot{q}_a^2+\frac{m}{2}\dot{q}_b^2$$

و

$$V=\frac{k}{2}\frac{(q_a+q_b)^2}{2}+\frac{k}{2}\frac{(q_a-q_b)^2}{2}+\frac{k'}{2}q_b^2=\frac{k}{2}q_a^2+\frac{k''}{2}q_b^2$$

تؤول دالة لاغرانج إلى:

$$L=\frac{m}{2}\dot{q}_a^2+\frac{m}{2}\dot{q}_b^2-\frac{k}{2}q_a^2-\frac{k''}{2}q_b^2 \qquad (42-9)$$

حيث:

$$k''=k+2k'$$

بكتابة معادلتي لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}=\frac{\partial L}{\partial q_a} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}=\frac{\partial L}{\partial q_b}$$

نجد:

$$m\ddot{q}_a=-kq_a \quad \text{و} \quad m\ddot{q}_b=-kq_b$$

هاتان المعادلتان منفصلتين مباشرة ولذا يكون حل كل واحدة من الشكل:

$$\begin{cases} q_a=A\cos(\omega_a t+\varphi_a) \\ q_b=A\cos(\omega_b t+\varphi_b) \end{cases} \qquad (43-9)$$

حيث وضعنا:

$$\omega_a=(\frac{k}{m})^{1/2}$$
$$\omega_b=(\frac{k''}{m})^{1/2}=(\frac{k+2k'}{m})^{1/2}$$

يتضح لنا من الحلين السابقين أنه من أجل أي حركة ممكنة للمنظومة فإن q_a

ستهتز بتردد ω_a وتهتز q_b بتردد ω_b.

تدعى كل من q_a و q_b بـ **إحداثي طبيعي** *(normal coordinate)* للمنظومة.

في الحالة العامة فإن كل إحداثي طبيعي يتألف من مجموع خطي للإحداثيات بحيث تؤول الطاقة الحركية وطاقة الوضع إلى مجموع مقادير تربيعية للإحداثيات الطبيعية فقط، كما تكون معادلات لاغرانج منفصلة تلقائياً، كما هو الحال في المعادلات(9-42). ينتج عن ذلك أن لكل إحداثي طبيعي تردد واحد فقط يتميز بأنه من أجل كل حالة طبيعية هناك إحداثي طبيعي له تردده الطبيعي. فعندما تهتز منظومة ما بتردد طبيعي واحد فقط فإن كل الإحداثيات تهتز بذلك التردد ويكون هناك إحداثي طبيعي واحد فقط غير معدوم.

في حالة هزازين مرتبطين نكتب:

(أ) الوضع المتناظر *(symmetric mode)*:

$$\omega=\omega_a \text{ و } q_a \text{ هي الإحداثي الفاعل ، و } q_b=0 \quad , \quad x_1=x_2$$

(ب) الوضع معاكس التناظر *(antisymmetric mode)* :

$$\omega=\omega_b \text{ و } q_b \text{ هي الإحداثي الفاعل ، و } q_a=0 \quad , \quad x_1=-x_2$$

9 - 6 الإحداثيات الطبيعية لأي منظومة ذات درجتي حرية

لإيجاد الإحداثيات الطبيعية لأي منظومة لها درجتين من الحرية نعود إلى معادلتي السعة العظمى (9-26) اللتين تحددان الشروط الواجب توافرها ليكون لمعادلات الحركة حل مقبول.

في الحالة العامة نكتب هاتين المعادلتين على النحو التالي:

$$\frac{A_1}{A_2}=c=\frac{x_1}{x_2}$$

حيث c عدد يتحدد عندما نجد الترددات الطبيعية، ويكون لهذا العدد قيمة مختلفة باختلاف التردد الطبيعي وقد وجدنا في المثل السابق أن $c=+1$ أو $c=-1$.

من الواضح أنه إذا عرفنا إحداثيين جديدين بالعلاقتين:

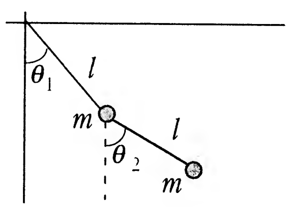
$$\begin{cases} q_a = x_1 - c_1 x_2 \\ q_b = x_1 - c_2 x_2 \end{cases} \qquad (44-9)$$

حيث c_1 وc_2 قيمتي c عندئذ تكون q_a و q_b الإحداثيين الطبيعيين بالضرورة لأن أحدهما سيكون معدوماً عندما تهتز المنظومة بتردد طبيعي لها. ومن الواضح أن أي مضاعف ثابت للكميتين المعرفتين بالعلاقتين (44-9) هو أيضاً إحداثي طبيعي.

مثل 9-2 البندول المضاعف *(The double pendulum)*

لندرس حركة بندول مضاعف مؤلف من خيط طوله $2l$ نهايته مثبتة بالسقف بينما يعلق بنهايته الأخرى جسيم صغير كتلته m وآخر عند وسطه، كما في الشكل (9-7).

بفرض أن اهتزازات المنظومة ستبقى في نفس المستوي، عندئذ نحدد حركة الجسيمين بالإحداثيين θ وφ، على الترتيب. كما تكون سرعة كل واحد هي $l\dot{\theta}$ و $l(\dot{\theta}+\dot{\varphi})$ وطاقة وضعهما $-mgl\cos\theta$ و $-mgl(\cos\theta+\cos\varphi)$، على الترتيب أيضاً.



الشكل (9-7)

نكتب دالة لاغرانج:

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} l^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + 2mgl\cos\theta + mgl\cos\varphi$$

بحسب معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad \text{و} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

نجد:

$$ml^2\ddot{\theta}+ml^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})=-2mgl\sin\theta$$

$$ml^2(\ddot{\theta}+\ddot{\varphi})=-mgl\sin\varphi$$

بفرض أن $\sin\theta\approx\theta$ و $\sin\varphi\approx\varphi$ وترتيب الحدود نجد:

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}+\frac{2g}{l}\theta+\ddot{\varphi}=0 \\ \ddot{\theta}+\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0 \end{cases} \qquad (45-9)$$

كما نجد المعادلة المميزة من معين (محدد) الأمثال:

$$\begin{vmatrix} -2\omega^2+\frac{2g}{l} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2+\frac{g}{l} \end{vmatrix}=0$$

أو

$$\omega^4-4\omega^2(\frac{g}{l})+2(\frac{g}{l})^2=0$$

فيكون الترددان الطبيعيان هما:

$$\begin{cases} \omega_a=\sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})} \\ \omega_b=\sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})} \end{cases} \qquad (46-9)$$

فإذا اهتزت المنظومة بأحد الترددين الطبيعيين عندئذ نجد أن (45-9) تعطي:

$$(-2\omega^2+2\frac{g}{l})\ \theta=\omega^2\varphi$$

بتعويض قيمتي ω من (46-9) في هذه العلاقة نجد العلاقتين اللتين تربطان بين θ و φ للحالتين الطبيعيتين:

الوضع المتناظر $\omega=\omega_a$ و $\varphi=+\sqrt{2}\theta$

الوضع معاكس التناظر $\omega=\omega_b$ و $\varphi=-\sqrt{2}\theta$

مما تقدم ينتج أن للثابت c في المعادلة (44-9) قيمتين ممكنتين هما $\pm\sqrt{2}$ ، ويكون الإحداثيان الطبيعيان:

$$q_a=\varphi+\sqrt{2}\theta$$
$$q_b=\varphi-\sqrt{2}\theta$$

يمكن البرهان على أن دالة لاغرانج ستكون مؤلفة من مجموع مربعات فقط عند استخدام الإحداثيين الطبيعيين السابقين . ❐

9-7 النظرية العامة للمنظومات المهتزة

سندرس فيما يلي حركة منظومة لها n درجة حرية والتي يمكن كتابة طاقة الحركة لها على النحو:

$$T=\frac{1}{2}\mu_{11}\dot{q}_1^2+\mu_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\frac{1}{2}\mu_{22}\dot{q}_2^2+\ldots=\sum_j\sum_k\frac{1}{2}\mu_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k \qquad (47-9)$$

ذلك بفرض أنه لايوجد قيود متحركة عليها.

بما أن المنظومة تهتز حول وضع اتزان لها، لذا سنفترض أن الأمثال μ ثابتة وأن قيمهم هي تلك عند وضع الاتزان. كما سنفترض أيضاً أننا قمنا بإجراء تحويل مناسب لمنظومة المحاور الإحداثية بحيث يقع وضع الاتزان عند الموضع:

$$q_1=q_2=\ldots=q_n=0$$

بحسب ماتقدم نكتب طاقة الوضع على النحو:

$$V=\frac{1}{2}\kappa_{11}q_1^2+\kappa_{12}q_1q_2+\frac{1}{2}\kappa_{22}q_2^2+\ldots=\sum_j\sum_k\frac{1}{2}\kappa_{jk}\,q_j\,q_k \qquad (48-9)$$

وتصير دالة لاغرانج بالشكل:

$$L=\sum_j\sum_k\frac{1}{2}(\mu_{jk}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k-\kappa_{jk}\,q_j\,q_k) \qquad (49-9)$$

ونكتب معادلات الحركة:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$$

التي تعطي:

$$\sum_j(\mu_{jk}\,\ddot{q}_j+\kappa_{jk}\,q_j)=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (50-9)$$

إذا كان هناك حل من الشكل:

$$q_k=A_k\cos\omega t \qquad (k=1,2,\ldots n) \qquad (51-9)$$

عندئذ نجد بالتعويض المباشر أن المعادلة التالية يجب أن تكون محققة دوماً:

$$\sum_j(-\mu_{jk}\omega^2+\kappa_{jk})A_j=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (52-9)$$

ونجد حلاً غير بديهي للمعادلات السابقة بفرض أن معين الأمثال يساوي الصفر، أي أن:

$$\begin{vmatrix}-\mu_{11}\omega^2+\kappa_{11} & -\mu_{12}\omega^2+\kappa_{12} & \cdots\\ -\mu_{21}\omega^2+\kappa_{21} & -\mu_{22}\omega^2+\kappa_{22} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}=0 \qquad (53-9)$$

تمثل المعادلة المميزة السابقة كثير حدود من المرتبة n في ω جذورها هي مربعات الترددات الطبيعية للمنظومة.

وجود الإحداثيات الطبيعية

بما أنه لايمكن للطاقة الحركية أن تكون سالبة، لذا يجب أن يكون أي تمثيل لها بالإحداثيات العامة موجباً دوماً. وبحسب نظرية في التحويلات الخطية تقول إن .

أمثال الكميتين:

$$\sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k \qquad \text{و} \qquad \sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k$$

تحقق

$$b_{jk} = b_{kj} \qquad \text{و} \qquad a_{jk} = a_{kj}$$

عندها إذا كان الأول موجباً دوماً عندئذ يوجد تحويل خطي من الشكل:

$$x_k = \sum_j c_{kj} y_j \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

بحيث يؤول كثيرا الحدود السابقين إلى مجموع مربعات، أي أن :

$$\sum_j \sum_k a_{jk} x_j x_k = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$$

و

$$\sum_j \sum_k b_{jk} x_j x_k = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \ldots + \beta_n y_n^2$$

تنص النظرية أيضاً على أن جذور المعادلة المميزة:

$$\begin{vmatrix} -\gamma_{11}\omega^2 + b_{11} & -\gamma_{12}\omega^2 + b_{12} & \cdots \\ -\gamma_{21}\omega^2 + b_{21} & -\gamma_{22}\omega^2 + b_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

مطابقة لجذور المعادلة:

$$\begin{vmatrix} -\gamma\alpha_1\omega^2 + \beta_1 & 0 & \cdots \\ 0 & -\gamma\alpha_1\omega^2 + \beta_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

وبتطبيق النظرية المذكورة في حالتنا هذه نجد نستنتج أنه يوجد مجموعة إحداثيات:

$$\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_n$$

تعطى بالتحويل الخطي:

$$q_k = \sum_j c_k \, \bar{q}_j \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{54-9}$$

بحيث أن T و V تصيران مجموعي مربعات من الشكل:

$$T = \frac{1}{2}(\bar{\mu}_1 \dot{\bar{q}}_1^2 + \bar{\mu}_2 \dot{\bar{q}}_2^2 + \ldots + \bar{\mu}_n \dot{\bar{q}}_n^2) \tag{55-9}$$

و

$$V = \frac{1}{2}(\bar{\kappa}_1 \bar{q}_1^2 + \bar{\kappa}_2 \bar{q}_2^2 + \ldots + \bar{\kappa}_n \bar{q}_n^2) \tag{56-9}$$

وتصير دالة لاغرانج نتيجة لهذا التحويل:

$$L = \sum_k \frac{1}{2}(\bar{\mu}_k \, \dot{\bar{q}}_k^2 - \bar{\kappa}_k \, \bar{q}_k^2) \tag{57-9}$$

ونجد معادلات الحركة عندئذ:

$$\bar{\mu}_k \, \ddot{\bar{q}}_k + \bar{\kappa}_k \, \bar{q}_k = 0 \qquad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{58-9}$$

وحلولها:

$$\bar{q}_k = \bar{A}_k \cos(\omega t + \varphi_k) \tag{59-9}$$

حيث:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\bar{\kappa}_k}{\bar{\mu}_k}}$$

بذلك تكون الكميات $\bar{q}_k$ هي الإحداثيات الطبيعية، والترددات الطبيعية المرافقة لها هي ω_k.

بحسب النظرية التي ذكرناها آنفاً فإن الترددات الطبيعية هي جذور المعادلة المميزة (9-53) التي يمكن كتابتها بدون معرفة الإحداثيات الطبيعية.

أما إيجاد التحويل الضروري لإيجاد الإحداثيات الطبيعية (المعادلة (9-56))، فيستوجب تقطير مصفوفة، كما فعلنا في الحركة العامة للجسم الصلب.

9 - 8 حركة منظومة عامة بوجود قوى دافعة خارجية وقوى تخامد

درسنا حتى الآن الحركة الاهتزازية لمنظومة غير خاضعة لقوى خارجية دافعة أو قوى تخامد، وإذا تواجدت قوى من هذا النوع عندئذ نكتب دالة لاغرانج، كما في درسنا ، على النحو:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial L}{\partial q_k}+Q_k \qquad (60-9)$$

حيث تدل Q_k على قوى التخامد العامة التي تعطى بالعلاقة:

$$Q_k=-c_{1k}\,\dot{q}_1-c_{2k}\,\dot{q}_2-\cdots-c_{nk}\,\dot{q}_n \qquad (61-9)$$

وتكون معادلات الحركة الناتجة مشابهة لحالة حركة غير متخامدة (المعادلات (9-50)) باستثناء وجود الحدود $\dot{q}_k$ في هذه الحالة.

من الممكن في أغلب الحالات (ولكن ليس دائماً بالضرورة) إيجاد تحويل إلى إحداثيات عامة بحيث تكتب معادلات الحركة على النحو:

$$\bar{\mu}_k\,\ddot{\bar{q}}_k+c_k\,\dot{\bar{q}}_k+\bar{\kappa}_k\,\bar{q}_k=0 \qquad (62-9)$$

بحيث أن:

$$\bar{q}_k=\bar{A}_k\,e^{-\lambda_k t}\cos(\omega_k t+\varphi_k) \qquad (63-9)$$

نلاحظ أن سعة الحركة المتخامدة تتلاشى مع مرور الزمن بشكل أسي، كما يمكن أن تكون الحركة غير اهتزازية عندما يكون التخامد عالياً جداً أو حرجاً، كما درسنا في الفصل الأول.

أخيراً، إذا كانت هناك قوى أخرى غير القوى الدافعة الخطية أو قوى التخامد، كالقوى التي تتغير جيبياً مع الزمن، عندئذ يمكن إدخالها بشكل مباشر $Q_{kext}\cos\omega t$ (أو $Q_{kext}\, e^{i\omega t}$) في كل معادلة للحركة (9-60) ويكون شكل معادلة الحركة بالإحداثيات الطبيعية هو :

$$\bar{\mu}_k\ \ddot{\bar{q}}_k + c_k\ \dot{\bar{q}}_k + \bar{\kappa}_k\ \bar{q}_k = Q_k\ e^{i\omega t} \qquad (64-9)$$

فإذا كانت المنظومة مثلاً خاضعة لقوة خارجية وحيدة تتغير جيبياً مع الزمن بتردد مساو لأحد الترددات الطبيعية للمنظومة نفسها عندئذ يكون الإحداثي الطبيعي هو ذلك الذي يكون له أكبر سعة عندما تؤول الحركة إلى الاهتزازات الدائمة. وفي الواقع إذا كان معامل التخامد صغيراً جداً عندئذ يكون ذلك الإحداثي هو الوحيد الممكن للمنظومة.

9-9 اهتزازات سلك محمّل بكتل صغيرة

سندرس في هذه الفقرة اهتزازات منظومة بسيطة مؤلفة من سلك مرن مثبت من طرفيه ومُحمَّل بجسيمات صغيرة كتلة الواحدة m وعددها n موضوعة عند أبعاد متساوية من بعضها. تفيد هذه المسألة في فهم النظرية العامة للاهتزازات الصغيرة وتقود إلى مفهوم الحركة الموجية التي نعتبرها في الفقرة التالية.

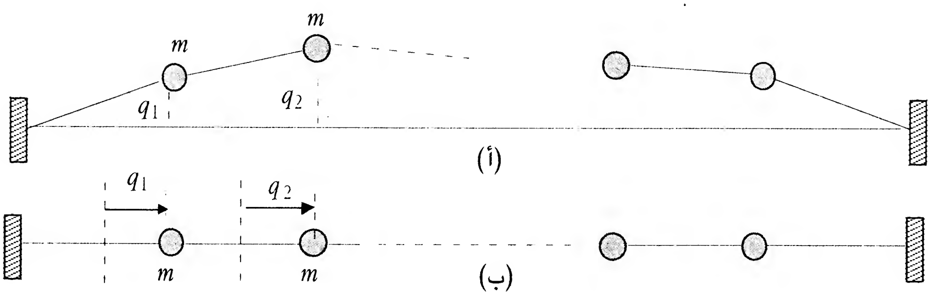
لنرمز للسعة الآنية (البعد الآني عن وضع الاتزان) للجسيمات بالإحداثيات q_1, q_2 q_n , ... , من الواضح أن هناك نوعين من الحركات يمكن لكل جسيم القيام بهما وهما الاهتزاز للأعلى وللأسفل، أي اهتزازات عرضية *(transverse motion)*، كما في الشكل (9-8 أ)، أو اهتزاز لليمين ولليسار بشكل مواز للسلك أي حركة طولية *(longitudinal motion)*، كما في الشكل (9-8 ب).

سنفترض في دراستنا هذه أن الحركة هي من إحدى النوعين وليست مزيجاً

منهما كما هي الحال في الاهتزازات الفعلية لمنظومة كهذه.

لنكتب الطاقة الحركية:

$$T=\frac{m}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\cdots+\dot{q}_n^2) \qquad (65-9)$$



الشكل (8-9)

وباستخدام الرمز ν للإشارة إلى أي جسيم عندئذ نجد في حالة الاهتزازات الطولية أن استطالة السلك بين الجسيمين ν و $\nu+1$ تكون:

$$q_{\nu+1}-q_{\nu}$$

وتكون طاقة الوضع لهذا الجزء من السلك هي:

$$\frac{1}{2}K(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2$$

حيث K معامل مرونة ذلك الجزء الواصل بين الجسيمين.

أما في حالة الاهتزازات العرضية فإن المسافة بين الجسيمين ν و $\nu+1$ هي:

$$[h^2+(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2]^{1/2}=h+\frac{1}{2h}(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2+\cdots$$

حيث h المسافة بين الجسيمين في وضع الاتزان.

يمكن تقريب استطالة السلك على النحو:

$$\Delta l=\frac{1}{2h}(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2$$

فإذا كان S هو الشد في السلك عندئذ تكون طاقة الوضع لهذا الجزء:

$$S\Delta l=\frac{S}{2h}(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2$$

ينتج عن ذلك أن أن طاقة وضع المنظومة كلها سواء كانت الحركة طولية أم عرضية هي مجموع مربعات من الشكل:

$$V=\frac{k}{2}[q_1^2+(q_2-q_1)^2+\cdots+(q_n-q_{n-1})^2+q_n^2] \tag{66-9}$$

حيث:

$$k=\frac{K}{h} \qquad \text{(الحركة العرضية)}$$

أو

$$k=K \qquad \text{(الحركة الطولية)}$$

تعطى دالة لاغرانج في هذه الحالة بالعلاقة:

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\nu}[m\dot{q}_{\nu}^2-k(q_{\nu+1}-q_{\nu})^2]\,, \tag{67-9}$$

ومن معادلات لاغرانج:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\nu}}=\frac{\partial L}{\partial q_{\nu}}$$

نجد:

$$m\ddot{q}_{\nu}=-(q_{\nu}-q_{\nu-1})+k(q_{\nu+1}-q_{\nu}) \tag{68-9}$$

حيث $\nu=1,2,\ldots,n$

تمثل (68-9) n معادلة تفاضلية مرتبطة *(coupled oscillations)*، لحلها نفترض أن

الإحداثيات q تتغير جيبياً مع الزمن ونجرب حلاً من الشكل:

$$q_\nu = a_\nu e^{i\omega t} \qquad (69-9)$$

حيث $a\nu$ سعة حركة الجسيم ν.

بتعويض الحل التجريبي المذكور في (68-9) نجد علاقة إرجاع *(recursion formula)* للسعات $a\nu$:

$$-m\omega^2 a_\nu = k(a_{\nu-1} - 2a_\nu + a_{\nu+1}) \qquad (70-9)$$

تحدد العلاقة السابقة موضع بداية ونهاية السلك بوضع:

$$a_0 = a_{n+1} = 0 \qquad (71-9)$$

من ثم نجد المعين (المحدد) المميز:

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k & 0 & \cdots & 0 \\ -k & -m\omega^2 + 2k & -k & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \qquad (72-9)$$

بما أن هذا المعين من المرتبة n فيكون هناك n جذراً أو قيمة للتردد ω محققة للمعادلة المميزة. بدلاً من محاولة إيجادهم جبرياً، يمكن الاستفادة من العلاقة الإرجاعية (70-9) على النحو التالي:

لنعرف الكمية φ المرتبطة بالسعة $a\nu$ بالعلاقة:

$$a_\nu = A \sin(\nu\varphi) \qquad (73-9)$$

بالتعويض المباشر في (70-9) نجد:

$$-m\omega^2 A \sin(\nu\varphi) = kA[\sin(\nu\varphi - \varphi) - 2\sin(\nu\varphi) + \sin(\nu\varphi + \varphi)] \qquad (74-9)$$

التي تختصر بسهولة إلى:

$$m\omega^2 = k(2-2\cos\varphi) = 4k\sin^2\frac{\varphi}{2} \qquad (75-9)$$

أو

$$\omega = 2\omega_0\ \sin\frac{\varphi}{2} \qquad (76-9)$$

حيث

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (77-9)$$

تعطي(76-9) الترددات الطبيعية بدلالة الكمية φ التي لم نحددها بعد، الاّ أنه من الواضح أن نفس العلاقة ستكون صحيحة سواء بغض النظر عن الطريقة التي كتبنا السعة الآنية a_ν بها سواء كانت $A\cos(\nu\varphi)$، أو $Ae^{i\nu\varphi}$ أو $Ae^{-i\nu\varphi}$، أو أي مجموع خطي من هذه الكميات. الاّ أن $a_\nu = A\sin(\nu\varphi)$ هو الشكل الوحيد الذي يحقق شرط النهاية الأولى $a_0=0$، لذا نستعين بشرط النهاية الثانية $a_n=0$ لإيجاد القيمة الحقيقية لـ φ فنلاحظ أنه لايتحقق الاّ إذا كان:

$$(n+1)\varphi = N\pi \qquad (78-9)$$

حيث N عدد صحيح، لوجدنا عندئذ أن:

$$a_{n+1} = A\sin(N\pi) = 0$$

بتحديد φ نستطيع إيجاد الترددات الطبيعية من العلاقة:

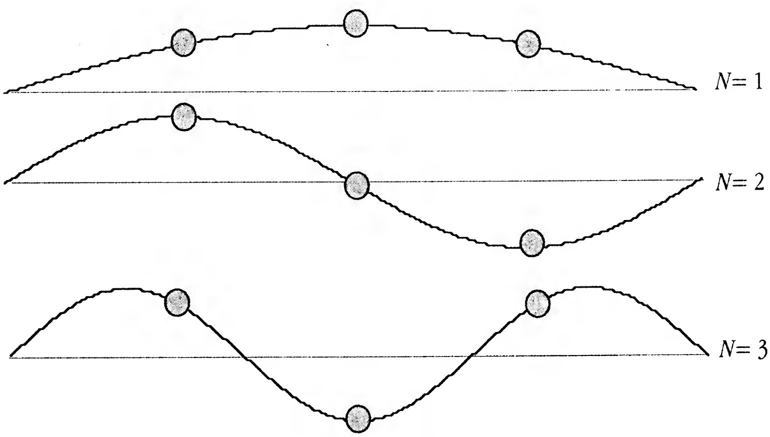
$$\omega_N = 2\omega_0\sin\left(\frac{N\pi}{2n+2}\right) \qquad (79-9)$$

كما نجد من (73-9) و (78-9) أن سعة الاهتزازات للحالات الطبيعية هي:

$$a_\nu = A\sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right) \qquad (80-9)$$

ترمز الأعداد $\nu=1,2,\ldots,n$ إلى رقم الجسيم المدروس، بينما تدل الأعداد $N=1,2,\ldots,n$ إلى الحالة الطبيعية *(normal mode)* التي تهتز بها المنظومة.

يوضح الشكل (9-9) الحالات الطبيعية المختلفة كما رسمناها من المعادلة (80-9) حيث اعتبرنا عدد الجسيمات على السلك (باستثناء النهايتين) $n=3$ ورسمنا الحالات الطبيعية الثلاث الأولى $N=1,2,3$ فقط .



الشكل (8-9)

تكون معادلة الحركة للمنظومة عندما تهتز بتردد طبيعي واحد فقط معطاة بالعلاقة:

$$q_\nu = a_\nu \cos(\omega_N t) = A \sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right)\cos(\omega_N t) \qquad (81-9)$$

أما الاهتزازات العامة (كل الترددات الممكنة) فهي مجموع خطي للترددات الطبيعية من الشكل:

$$q_\nu = \sum_{N=1}^{n} A_N \sin\left(\frac{N\pi\nu}{n+1}\right)\cos(\omega_N t + \varphi_N) \qquad (82-9)$$

حيث تتحدد قيمتي A_ν و φ_ν من الشروط الابتدائية.

في حالة كون عدد الجسيمات n أكبر بكثير من عدد الحالات الطبيعية N تصير-

النسبة $N\pi/(2n+2)$ صغيرة، لذا نقرب (9-79) إلى:

$$\omega_N \approx N\left(\frac{\pi\omega_0}{n+1}\right) \qquad (83-9)$$

أي أن الترددات الطبيعية هي مضاعفات صحيحة من التردد الأصغر $\pi\omega_0/(n+1)$، أي أنه يمكن اعتبار هذا التردد الأصغر كتردد أساس *(fundamental frequency)* بينما تكون بقية الترددات هي المتوافقات الثانية والثالثة وهكذا دواليك. تزداد دقة هذه العلاقة الخطية كلما زاد عدد الجسيمات على السلك.

مسائل

1-9 حدد نقاط الاتزان الممكنة ونوعها لجسيم يتحرك على خط مستقيم إذا خضع لجهود معطاة بالعلاقات التالية (كل الثوابت موجبة):(أ) $V(x)=kx^2/2+k^2/x$ (ب) $V(x)=k(x^4-b^2x^2)$ (جـ) $V(x)kxe^{-bx}$. جد تردد الاهتزازات الصغيرة حول مواضع الاتزان المستقر في الحالات المذكورة.

2-9 يتحرك جسيم في مستو بطاقة وضع من الشكل: $V(x)=k(x^2+y^2-2bx-4by)$. برهن أن هناك وضع اتزان مستقر واحد للجسيم وحدد نوعه . (k و b ثابتان موجبان).

3-9 تعطى طاقة الوضع لجسيم يتحرك على خط مستقيم بالعلاقة : $V(x)=-kx^2/2$ ($k>0$) بحيث أن القوة المؤثرة عليه هي قوة "إبعاد" من الشكل $F=kx$ و $x=0$ هي نقطة اتزان غير مستقر. برهن أنه إذا كانت الشروط الابتدائية $x=x_0$ و $v_0=0$ فإن حركة الجسيم ستكون $x(t)=x_0(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})/2$ حيث $\alpha=\sqrt{k/m}$.

4-9 تعلق كتلة m عند منتصف حبل خفيف طوله $2l$ ومشدود بين نقطتين. برهن أن طاقة وضع النظام تعطى بالعلاقة: $V(y)=2T[(y^2-2l(y^2+l^2)^{1/2}]-mgy$ حيث T الشد في الحبل وy ارتفاعm عن وضع الاتزان برهن أن وضع الاتزان يتحدد من جذور العلاقة $u^4-2au^3+a^2u^2-2au+a^2=0$ حيث $u=y/l$ و $a=mg/4kl$.

5-9 تتزن قطعة مكعبة منتظمة كتلتها m وطول ضلعها $2a$ على ذروة كرة خشنة نصف قطرها b. برهن أن طاقة الوضع تعطى بـ: $V(\theta)=mg[a(a+b)\cos\theta+b\theta\sin\theta]$ حيث θ زاوية الميل. برهن أن وضع الاتزان يقع عند $\theta=0$ وأنه مستقر أو غير مستقر بحسب كون a أصغر أو أكبر من b.

6-9 انشر طاقة الوضع في المسألة السابقة كسلسلة قوى في θ وحدد اتزان المنظومة عندما $a=b$.

7-9 تسكن نصف كرة صلبة منتظمة نصف قطرها a على ذروة نصف كرة نصف قطرها b بحيث يكون السطحان الكرويان على تماس. برهن أن الاتزان ممكن إذا كان $a<3b/5$.

8-9 جد تردد الاهتزازات الشاقولية الصغيرة للكتلة المذكورة في المسألة 9-4.

9-9 جد تردد الاهتزازات الصغيرة للمكعب المذكور في المسألة 9-5.

10-9 جد تردد الاهتزازات الصغيرة لنصف الكرة المذكورة في المسألة 9-7.

11-9 تهتز كرة معدنية صغيرة نصف قطرها a على السطح الداخلي لنصف كرة مقلوبة نصف قطرها b. برهن أن دور الاهتزازات الصغيرة هو $2\pi[7(b-a)/5g]^{1/2}$ وجد قيمته إذا كان $b=1\text{ m}$ و $a=1\text{ cm}$.

12-9 جد حركة كل كتلة للمنظومة الموضحة في الشكل (9-4) إذا كانت الشروط الابتدائية هي: $x_1(0)=2a$ و $\dot{x}_1(0)=x_2(0)=\dot{x}_2(0)=0$ وبرهن أنها تماثل الخفقان.

13-9 برهن أنه إذا كان ارتباط الكتلتين في المسألة السابقة ضعيفاً $\kappa'<<\kappa$ فإن الجسمين يتبادلان الطاقة بتردد $[2\pi/(\kappa/m)^{1/2}](\kappa/2\kappa')$ تقريباً.

14-9 حدد الترددات الطبيعية للبندول المضاعف إذا كان طول البندولين مختلفين.

15-9 اكتب معادلات الحركة لثلاث كتل متماثلة محملة على حبل خفيف مشدود وجد الترددات الطبيعية لهذه المنظومة.

المراجع

1- *Mechnics,* W. Arthur, and S.K. Fenster. New York: Holt-Rinhehart, and Winston, 1969

2- *Introduction to Theoretical Mechanics,* R.A. Becker. New York: McGraw Hill, 1954.

3- *Mechanics,* K.R. Symon. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1977.

4- *Theoretical Mechanics,* M.R. Spiegel. Schaum Outline Series: MCGraw-Hill, 1967.

5- *Classical Dynamics of Systems and Particles,* J.B. Marion, and S.T. Thornton. 3rd ed. Orlando: Hacourt-Brace-Govanovich, 1988.

6- *Analytical Mechanics,* G.R. Fowles, 4th ed. Philadelphia: Saunders, 1986.